Grundwissen 9. Jahrgangsstufe – Mathematik

1. Reelle Zahlen, Wurzeln und Potenzen

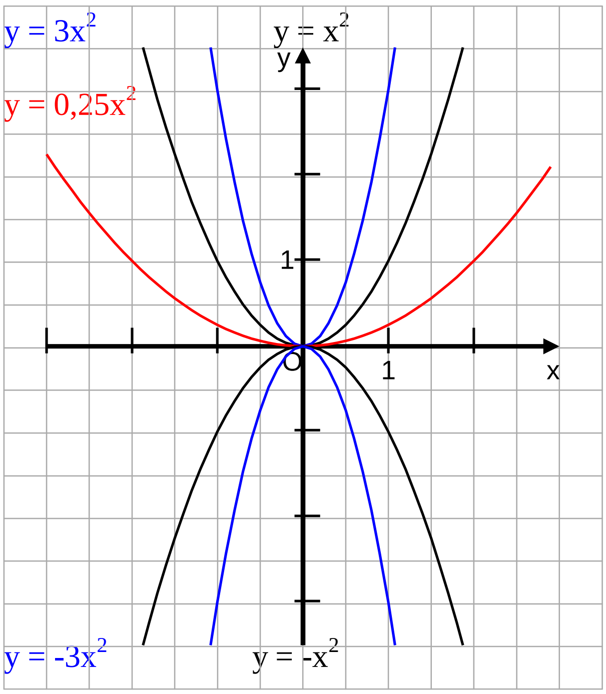
Wissen / Können	Beispiele
Die *Menge $\mathbb{R}$ der reellen* Zahlen besteht aus der Menge der rationalen Zahlen und der *Menge der irrationalen Zahlen.* Die rationalen Zahlen sind die endlichen und unendlichen, periodischen Dezimalzahlen, die irrationalen Zahlen sind die *unendlichen, nichtperiodischen Dezimalzahlen*.	Rationale Zahlen sind z.B.: 0; 1; -5; 1,345; $-2{,}5\overline{37}$; $\sqrt{25}$ Irrationale Zahlen sind z.B. π ; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{30}$; 2,39163963..........
Die *n-te Wurzel* ($n \in \mathbb{N}$) aus einer reellen Zahl $a \geq 0$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt. Oder	$\sqrt[3]{125} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5^3 = 125$ und $5 > 0$
Die n-te Wurzel ($n \in \mathbb{N}$) aus einer reellen Zahl $a \geq 0$ ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$. a heißt *Radikand* der n-ten Wurzel.	$x^3 = 216 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{216} = 6$
Die 2. Wurzel aus einer reellen Zahl $a \geq 0$ heißt *Quadratwurzel.*	Statt $\sqrt[2]{a}$ wird kurz $\sqrt{a}$ geschrieben.
Für alle reelle Zahlen $a \geq 0$ können Wurzeln ($n,m \in \mathbb{N}$) auch als Potenzen geschrieben werden. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ bzw. $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{m\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[6]{0{,}16^3} = 0{,}16^{\frac{3}{6}} = 0{,}16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$
<u>Rechnen mit Quadratwurzeln</u>: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ $(a,b \geq 0)$	$\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8$
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $(a \geq 0,\ b > 0)$	$\dfrac{\sqrt{1{,}25}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{1{,}25}{5}} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$
Summen und Differenzen von Quadratwurzeln kann man nur zusammenfassen, wenn die Radikanden gleich sind.	$3 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{3} - 5 \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{5}$
Enthält die Faktorisierung des Radikanden eine Quadratzahl, so kann man teilweise radizieren, d.h. teilweise die Wurzel ziehen.	$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$
Umgekehrt kann man einen positiven Faktor unter die Wurzel ziehen.	$5 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$

Für das Rechnen mit Potenzen gelten folgende Regeln. Die Regeln gelten nur für solche reellen Zahlen a bzw.b, für die die vorkommenden Terme definiert sind.	
(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^{-5} \cdot 2^6 = 2^{-5+6} = 2^1 = 2$
(2) $a^m : a^n = a^{m-n}$	$0{,}5^2 : 0{,}5 = 0{,}5^{2-1} = 0{,}5^1 = 0{,}5$
(3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(3^6)^{\frac{1}{3}} = 3^{6 \cdot \frac{1}{3}} = 3^2 = 9$
(4) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$	$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$
(5) $a^m : b^m = (a : b)^m$	$0{,}5^2 : 0{,}25^2 = (0{,}5 : 0{,}25)^2 = 2^2 = 4$

2. Quadratische Funktionen und Gleichungen

Eine Funktion mit einem Term der Form
f(x) = $ax^2 + bx + c \quad a,b,c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$
heißt *quadratische Funktion*. Ihr Graph ist eine Parabel.

Der Graph der Funktion f mit f(x) = x^2 heißt *Normalparabel*. Sie ist symmetrisch zur y-Achse. Ihr tiefster Punkt S(0/0) heißt *Scheitel*.



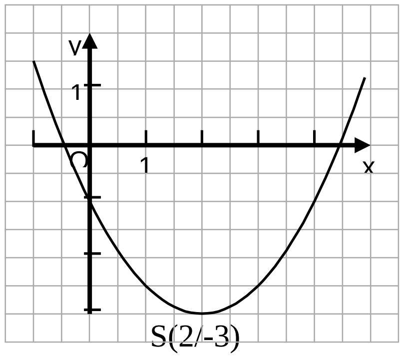
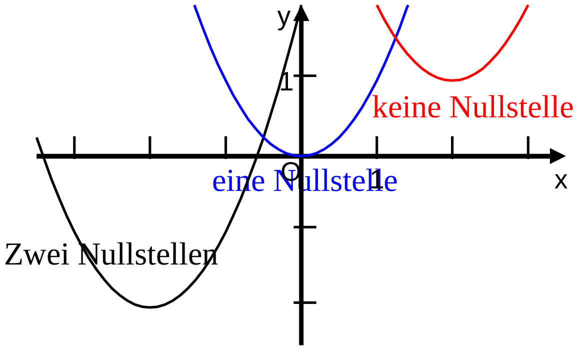
y = a x^2 ($a \in R$; $a \neq 0$) ist die Gleichung einer Parabel mit Scheitel S(0/0), die wie folgt aus der Normalparabel entsteht.
$a > 1$ oder $a < -1$:
Die Parabel ist enger als die Normalparabel (gestreckt).
$-1 < a < 1$:
Die Parabel ist weiter als die Normalparabel (gestaucht). Ist a > 0, so ist die Parabel nach oben geöffnet und der Scheitel ist der tiefste Punkt.

Ist a < 0, so ist die Parabel nach unten geöffnet und der Scheitel ist der höchste Punkt

Um die Lage der Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ zu bestimmen, kann die Gleichung z.B. durch quadratische Ergänzung in die Scheitelform
y = a(x - x_s)^2 + y_s gebracht werden.

Normalform: $y = 0{,}5x^2 - 2x - 1$

Ausklammern: $y = 0{,}5(x^2 - 4x - 2)$
Quadr. Ergänzen: $y = 0{,}5(x^2 - 4x + 4 - 4 - 2)$
$y = 0{,}5[(x - 2)^2 - 6]$
$y = 0{,}5(x - 2)^2 - 3$
$\Rightarrow$ Scheitelkoordinaten S(2/-3).
Die Parabel ist nach oben offen und gestaucht.
Graph s. nächste Seite.

Die Gleichung $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ ($a, x_s, y_s \in R$; $a \neq 0$) beschreibt eine Parabel mit den Scheitelkoordinaten: $S(x_s/y_s)$ und dem Öffnungsfaktor a.	
Je nach Lage schneidet eine Parabel die x-Achse in zwei Punkten oder sie berührt sie in einem Punkt (dem Scheitel) oder sie hat mit der x-Achse keinen gemeinsamen Punkt. Eine quadratische Funktion hat also entweder zwei – eine – oder keine *Nullstellen*. Die Nullstellen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$	
Eine Gleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit reellen Koeffizienten a, b, c und $a \neq 0$ überführen lässt, heißt *quadratische Gleichung.* Eine quadratische Gleichung kann zwei Lösungen, eine Lösung oder keine Lösung besitzen.	Beispiele für quadratische Gleichungen: $(3x - 2)^2 = 5$; $\quad 5x^2 - 3x + 2 = 0$ $(x + 5)(x - 3) = 0$
In einfachen Fällen können die Lösungen unmittelbar aus der Gleichung abgelesen oder nach äquivalenten Umformungen gefunden werden. Nur wenn kein solch einfacher Fall vorliegt, sollte man die *Lösungsformel* nutzen.	Die Gleichung $(2x - 5)^2 = -3$ hat keine Lösung. Die Gleichung $(x - 3)(x + 2) = 0$ hat die beiden Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = -2$ $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$
Die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ können mithilfe folgender Lösungsformel bestimmt werden. $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	(1) $x^2 + 2x - 15 = 0$ $D = 2^2 + 4 \cdot 1 \cdot 15 = 4 + 60 = 64 > 0$ Die Gleichung hat also zwei Lösungen. $x_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{64}}{2} = 3$ n $x_2 = \dfrac{-2 - \sqrt{64}}{2} = -5$
Ist die Diskriminante $D = b^2 - 4ac > 0$, so hat die Gleichung zwei Lösungen. Falls $D = 0$ ist, so gibt es eine Lösung und für $D < 0$ gibt es keine Lösung.	(2) $x^2 + 2x + 15 = 0$ $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = -56 < 0$ Die Gleichung hat keine Lösung.

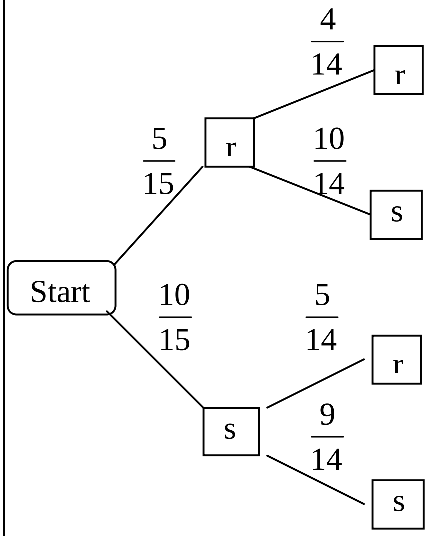
<table>
<tr><td colspan="2"><u>3. Zusammengesetzte Zufallsexperimente</u></td></tr>
<tr><td>
Zufallsexperimente, bei denen mehrere Teilexperimente nacheinander ausgeführt werden, bezeichnet man als zusammengesetzte Zufallsexperimente oder auch als mehrstufige Zufallsexperimente.

In einem Baumdiagramm kann man die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten antragen.

Für diese gelten folgende Regeln:
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von einem Knoten ausgehen, beträgt immer 1.

1. Pfadregel: Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm multipliziert.

2.Pfadregel: Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, indem man die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade bildet, die zu dem Ereignis führen.
</td><td>
In einer Urne befinden sich 5 rote (r) und 10 schwarze(s) Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln <u>ohne Zurücklegen</u> gezogen.

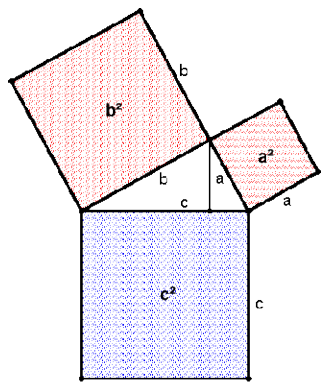
Die Wahrscheinlichkeit zwei rote Kugeln zu ziehen beträgt: P(r,r) = $\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{20}{210} = 9{,}5\%$
<u>Baumdiagramm:</u>


1. Zug 2. Zug
Die Wahrscheinlichkeit, eine Rote und eine Schwarze zu ziehen beträgt:
P = $\frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} + \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{100}{210} = 47{,}6\%$

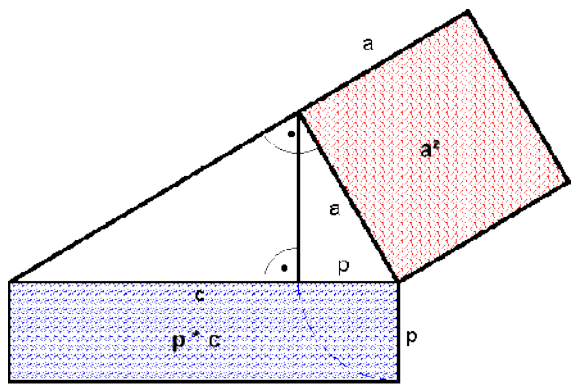
P(„mindestens eine rote Kugel“) =
1 – P(„keine rote Kugel“) =
$1 - \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = 1 - \frac{90}{210} = 100\% - 42{,}9\% = 57{,}1\%$
</td></tr>
</table>

4. Die Satzgruppe des Pythagoras

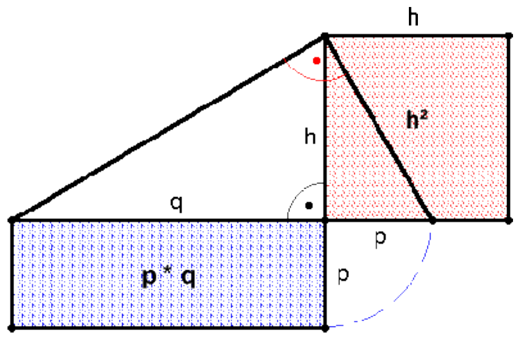
Satz des Pythagoras:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann ist die Summe der Quadrate der Kathetenlängen gleich dem Quadrat der Hypotenusenläge.
Kurz: $a^2 + b^2 = c^2$.
Im rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Hypotenuse den gleichen Flächeninhalt wie die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten.



Kathetensatz
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathetenlänge gleich dem Produkt aus der Hypotenusenläge und der Länge des anliegenden Hypotenusenabschnitts.
Kurz: $a^2 = c \cdot p$ bzw. $b^2 = c \cdot q$.
Im rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über einer Kathete den gleichen Flächeninhalt als das Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.



Höhensatz
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenusenhöhe gleich dem Produkt aus den Längen der beiden Hypotenusenabschnitte.
Kurz: $h^2 = p \cdot q$
Im rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe den gleichen Flächeninhalt als das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.



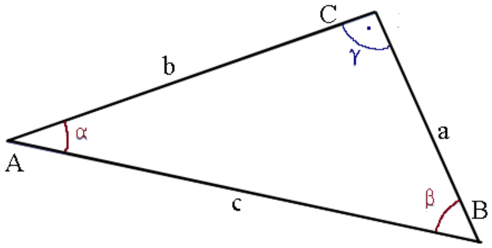
Trigonometrische Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck

Jedem spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck wird ein Seitenverhältnis zugeordnet, welchedas mit Sinus (sin), Kosinus (cos) bzw. Tangens (tan) bezeichnet wird.

Beispiel: Berechnung einer Seitenlänge

In einem Dreieck ABC sind folgende Größen gegeben: b = 7, 8 cm $\alpha = 32^0; \gamma = 90^0$

Aus diesen Angaben soll die Seitenlänge c ermittelt werden.



$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Da die Ankathete von α bekannt und die Hypotenuse gesucht ist, wird der Kosinus verwendet.

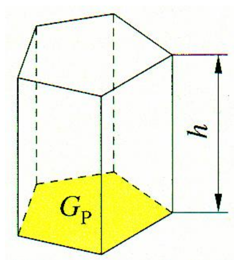
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$c = \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{7{,}8\,cm}{\cos 32^0} = 9{,}2\,cm$$

<u>5. Oberflächeninhalt und Volumen von Prisma, Zylinder, Pyramide und Kegel</u>

<u>*Gerades Prisma:*</u> Sind u_n der Umfang der n-Eckigen Grundfläche und h die Höhe des Prismas, dann ist der Mantelflächeninhalt: $M_p = u_n \cdot h$ und für den Oberflächeninhalt gilt: $O_p = 2 \cdot G_p + M_p$

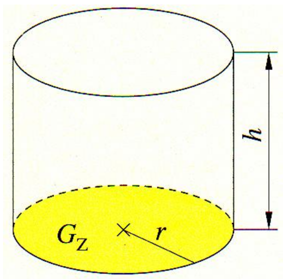
Das Volumen ist: $V_p = G_p \cdot h$



<u>*Gerader Kreiszylinder:*</u> Sind r der Radius des Grundflächenkreises und h die Höhe des Zylinders, dann ist der Mantelflächeninhalt: $M_z = 2\pi r \cdot h$ und für den Oberflächeninhalt gilt: $O_z = 2 \cdot G_z + M_z$ bzw.

$O_z = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r \cdot (r + h)$

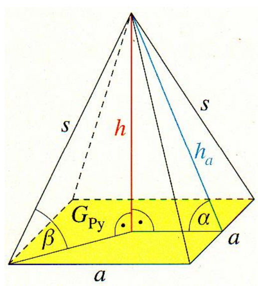
Das Volumen ist: $V_z = G_z \cdot h = \pi r^2 \cdot h$



<u>*Pyramide:*</u> Der Oberflächeninhalt einer Pyramide ist: $O_{Py} = G_{Py} + M_{Py}$

Für das Volumen einer Pyramide der Höhe h gilt: $V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot G_{Py} \cdot h$

Bei einer quadratischen Pyramide gelten z.B. folgende Zusammenhänge:



$$h_a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad h_a^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad \sin\alpha = \frac{h}{h_a} \qquad \sin\beta = \frac{h}{s}$$

Gerader Kreiskegel: Sind r der Radius des Grundkreises und m die Länge der Mantellinie, dann ist der Mantelflächeninhalt: $M_k = \pi \cdot r \cdot m$ und für den Oberflächeninhalt gilt: $O_k = G_k + M_k$ bzw.

$O_k = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot m = \pi r \cdot (r + m)$

Für das Volumen gilt:

$V_k = \frac{1}{3} \cdot G_k \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$

Bei einem geraden Kreiskegel gelten z.B. folgende Zusammenhänge:

$m^2 = r^2 + h^2 \qquad \sin\alpha = \frac{h}{m} \qquad \tan\alpha = \frac{h}{r}$