

Inhalte, Wissen und Begriffe

Anwendungen, Beispiele und Erklärungen

1. Brüche und Anteile

$$\frac{5}{6}$$

← Zähler
← Nenner

Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Teile das Ganze unterteilt wird. Der Zähler gibt an, wie viele dieser Teile „genommen“ werden.

Fachbegriffe:

$$\frac{2}{3} \text{ von } 6 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

Anteil das Ganze Bruchteil

Anteile lassen sich z.B. als Brüche schreiben.

Zwei Brüche, die den gleichen Nenner besitzen, nennt man **gleichnamig**.

Größenvergleich von Brüchen:

- Besitzen zwei positive Brüche den gleichen Nenner, so ist derjenige Bruch größer, der den größeren Zähler besitzt („mehr Stücke“).
- Besitzen zwei positive Brüche den gleichen Zähler, so ist derjenige Bruch größer, der den kleineren Nenner besitzt („größere Stückchengröße“!).

Erweitern und Kürzen:

Einen Bruch kann man **erweitern**, indem man Zähler **und** Nenner mit der **gleichen natürlichen Zahl multipliziert**. Die Umkehrung nennt man **Kürzen**. Der Wert des Bruchs **ändert sich dabei nicht**.

Ein Bruch ist vollständig gekürzt, wenn Zähler und Nenner **keinen gemeinsamen Primfaktor** mehr besitzen (z.B. ist $\frac{7}{12}$ vollständig gekürzt).

Hauptnenner:

Der Hauptnenner zweier oder mehrerer Brüche ist der **kleinstmögliche gemeinsame Nenner**, den man beim Erweitern der Brüche erhält.

Wichtige Anwendungen:

z.B.: Addition und Subtraktion von Brüchen, Größenvergleich

Beispiel:



Unterteilung in 6 gleich große Stücke, 5 werden „genommen“.

Berechnung des Bruchteils:

$$\frac{2}{3} \text{ von } 6 \text{ cm} = (6 \text{ cm} : 3) \cdot 2 = 4 \text{ cm}$$

Zuerst $\frac{1}{3}$ berechnen!

oder: Ersetze „von“ durch „·“:

$$\frac{2}{3} \cdot 6 \text{ cm} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1} \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

Umkehraufgabe: Berechnung des Ganzen:

$$\frac{2}{3} \text{ von } x = 4 \text{ cm} \text{ bzw. } \frac{2}{3} \cdot x = 4 \text{ cm}$$

$$x = (4 \text{ cm} : 2) \cdot 3 = 6 \text{ cm}$$

$$\text{oder: } x = 4 \text{ cm} : \frac{2}{3} = 4 \text{ cm} \cdot \frac{3}{2} = 6 \text{ cm}$$

Bestimmung des Anteils:

Das Ganze: 6 cm, Bruchteil: 4 cm

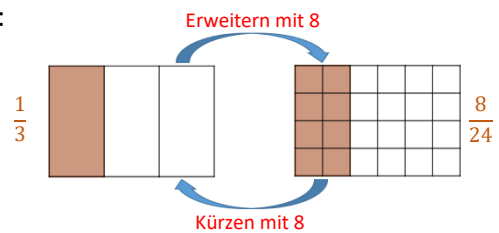
$$\text{Anteil: } \frac{4 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Hinweise: Vorher in gemeinsame Einheiten umwandeln! Anschließend kürzen!

Beispiele:

$$\frac{7}{15} > \frac{4}{15} \text{ und } \frac{7}{15} < \frac{7}{13}$$

Beispiele:



$$\text{Erweitern: } \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{8}{24} ; \text{ Kürzen: } \frac{8}{24} = \left(\frac{8:8}{24:8} \right) = \frac{1}{3}$$

Beispiel:

Bestimmen des Hauptnenners der Brüche $\frac{7}{16}$ und $\frac{5}{24}$ mit einer **Primfaktorzerlegung der Nenner**:

$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	Erweitern mit
$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$	3 „Welche Primfaktoren fehlen noch
Hauptnenner:	2 verglichen mit dem Hauptnenner?“
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$	

$$\frac{7 \cdot 3}{16 \cdot 3} = \frac{21}{48} \text{ und } \frac{5 \cdot 2}{24 \cdot 2} = \frac{10}{48}$$

Gemischte Zahlen und unechte Brüche:

Ist der Zähler eines Bruchs größer als der Nenner, so spricht man von einem **unechten Bruch**.

Unechte Brüche lassen sich in **gemischte Zahlen** umwandeln, indem man „die Ganzen“ herauszieht.

Jede natürliche bzw. ganze Zahl lässt sich als sog. **Scheinbruch** schreiben.

Bruchzahlen und die Menge der rationalen Zahlen:

Jeder Bruch ist ein Quotient, der Bruchstrich steht für das Rechenzeichen „:“. Im Nenner eines Bruchs kann daher **keine 0** stehen.

Jeder Bruch stellt eine Zahl, eine sog. Bruchzahl, dar, die man auch auf der Zahlengeraden eintragen kann.

Die Menge aller positiven und negativen Bruchzahlen bilden mit der 0 die Menge der **rationalen Zahlen Q**. $N = \{1; 2; 3; \dots\}$ und $Z = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$ sind vollständig in **Q** enthalten, da sich jede ganze Zahl auch als Scheinbruch schreiben lässt.

2. Prozentsätze und Dezimalbrüche

Als weitere Möglichkeiten, Bruchzahlen darzustellen, hast du die **Prozentschreibweise** und **Dezimalbrüche** kennengelernt.

Brüche mit **Nenner 100** kann man sofort in **Prozentschreibweise** angeben.

Die aus den Vorjahren bekannte **Stellenwerttafel** lässt sich über das Komma hinaus nach rechts erweitern. Es kommen die Spalten **Zehntel (z)**, **Hundertstel (h)**, **Tausendstel (t)**, ... hinzu. Die Nachkommastellen nennt man auch **Dezimalen**. Zahlen mit mindestens einer Nachkommastelle nennt man **Dezimalbrüche**.

Umwandeln von Brüchen in Dezimalbrüche:

Ein Bruch lässt sich nur dann in einen **endlichen Dezimalbruch** (d.h. einen Dezimalbruch mit endlich vielen Dezimalen) umwandeln, wenn der **Nenner** des vollständig gekürzten Bruchs **ausschließlich die Primfaktoren 2 und 5** (sowie deren Potenzen) enthält. Nur dann kann man den Bruch so erweitern, dass im Nenner eine Stufenzahl steht. Andernfalls ergibt sich ein unendlicher, **periodischer** Dezimalbruch.

Umwandeln von Dezimalbrüchen in Prozentschreibweise und umgekehrt:

Verschiebe das Komma dazu um zwei Stellen!

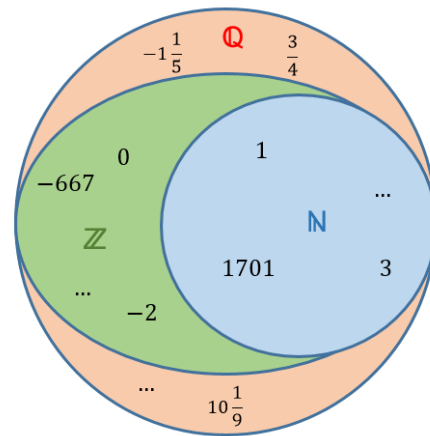
Umwandeln von Brüchen in Prozentschreibweise:
Kombiniere beide Verfahren!

Beispiele:

$$\frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$$

umgekehrt: $7\frac{1}{5} = \frac{7 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{36}{5}$

Beispiel: $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{100}{50} = \dots$



Beispiele:

$$\frac{17}{100} = 17\% ; 2\frac{20}{100} = 220\%$$

	Z	E	z	h	t		Dezimalbruch	Bruch / gemischte Zahl
...	1	2	0	4	2	...	12,042	$12\frac{42}{1000} = 12\frac{21}{500}$

Man denkt sich $12 + \frac{0}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} = 12 + \frac{40}{1000} + \frac{2}{1000} = 12\frac{42}{1000}$

Hierzu hast du zwei verschiedene Möglichkeiten kennengelernt:

- Erweitern des Nenners auf eine Stufenzahl:

$$\frac{7}{40} = \frac{7 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{175}{1000} = 0,175$$

- Schriftliches Dividieren über das Komma hinaus:

$$\frac{2}{90} = 2 : 90 = \begin{array}{r} 2,0000 \\ -180 \\ \hline 200 \\ -180 \\ \hline 200 \end{array} : 90 = 0,0222 \dots = 0,0\bar{2}$$

Beispiele:

$$25\% = 0,25 ; 0,125 = 12,5\%$$

Nebenstehende Brüche solltest du auswendig als Dezimalbrüche und z.T. als Prozentsätze wissen.

Bruch	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{10}$
Dezimalbruch	0,5	0,25	0,125	0,75	0,2	0,4	0,6	0,8	0,1
Prozentsatz	50 %	25 %	12,5 %	75 %	20 %	40 %	60 %	80 %	10 %

Zusätzlich: $\frac{1}{3} = 0, \overline{3}$; $\frac{2}{3} = 0, \overline{6}$; $\frac{1}{9} = 0, \overline{1}$; $\frac{2}{9} = 0, \overline{2}$; ... ;
 $0, \overline{9} = \frac{9}{9} = 1$

3. Addition und Subtraktion rationaler Zahlen

Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen:

Schreibe die Kommas untereinander und addiere (bzw. subtrahiere) Zehntel mit Zehntel, Hundertstel mit Hundertstel usw.

Bei Bedarf darfst du **Endnullen** ergänzen.

Addition und Subtraktion von Brüchen:

Bevor man die Brüche addieren oder subtrahieren kann, müssen sie **gleichnamig** gemacht werden, d.h. auf einen **gemeinsamen Nenner** gebracht werden. Dann werden die **Zähler addiert (bzw. subtrahiert)** und die **Nenner beibehalten**.

Kürze das Ergebnis, wenn möglich!

Addition und Subtraktion von gemischten Zahlen:

- Möglichkeit 1: Du kannst die gemischten Zahlen in unechte Brüche umwandeln und wie oben vorgehen.
- Möglichkeit 2 (etwas geschickter!): Verrechne die Ganzen miteinander und die Brüche miteinander.
„Trick“: Beim Subtrahieren musst du dir manchmal ein Ganzes „ausborgen“.

Vorteilhaftes Rechnen:

Tauchen in einem Term Brüche und Dezimalbrüche auf, lohnt es sich zu prüfen, ob sich der Termwert mithilfe der bekannten Rechengesetze (**Kommutativ- und Assoziativgesetz**) geschickt berechnen lässt. Andernfalls musst du alle Zahlen in eine gemeinsame Darstellungsform umwandeln.

Beispiel: $12,43 - 7,598 = \dots$

$$\begin{array}{r} 12,430 \\ - 7,598 \\ \hline 4,832 \end{array}$$

Beispiele:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{3}{18} + \frac{12}{18} + \frac{2}{18} = \frac{17}{18}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$$

Beispiele:

$$1\frac{1}{6} + 1\frac{1}{3} = \frac{7}{6} + \frac{4}{3} = \frac{7}{6} + \frac{8}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$$1\frac{1}{6} + 1\frac{1}{3} = (1 + 1) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = 2\frac{1}{2}$$

$$3\frac{1}{6} - 1\frac{5}{6} = 2\frac{7}{6} - 1\frac{5}{6} = 1\frac{2}{6} = 1\frac{1}{3}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} + 0,757 + \frac{2}{3} + 0,243 &= \left(1\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) + (0,757 + 0,243) = \\ &= 1\frac{5}{6} + 1 = 2\frac{5}{6} \end{aligned}$$

Kommutativgesetz: Vertauschen der Summanden

Assoziativgesetz: Klammern setzen

4. Multiplikation und Division rationaler Zahlen

Multiplikation und Division von Brüchen:

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man **Zähler und Zähler** und **Nenner und Nenner** miteinander multipliziert.

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem **Kehrbruch** multipliziert.

Vor dem Ausmultiplizieren ist es sehr sinnvoll zu prüfen, ob man **kürzen** kann!

Gemischte Zahlen müssen **in unechte Brüche** umgewandelt werden!

Beispiele:

Hier wurde gekürzt!

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

$$-1\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{3}$$

Vorzeichenregeln wie bisher!

$$\frac{2}{5} : \frac{4}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{10}$$

Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen:

Multipliziere die Faktoren zunächst ohne Beachtung des Kommas. Das Ergebnis erhält dann genau so viele Nachkommastellen, wie die Faktoren zusammen besitzen.

Bei der Division wird das Komma beim Dividenden und beim Divisor gleichzeitig um so viele Stellen nach links verschoben, bis der Divisor eine ganze Zahl ist. Gehe beim schriftlich Rechnen wie bei 2. (vgl. oben!) vor.

Geschicktes Rechnen:

Überlege dir vorher gut, ob es sinnvoller ist, mit Brüchen oder mit Dezimalbrüchen zu rechnen! Mit periodischen Dezimalbrüchen kann man auf jeden Fall **nicht weiterrechnen!**

Potenzen und negative Exponenten:

Schau dir vor allem bei Brüchen gut an, worauf sich der Exponent bezieht, d.h. wie die Klammern gesetzt sind!

Eine Potenz mit negativem ganzzahligen Exponenten wird folgendermaßen berechnet:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

(für $n \in \mathbb{N}$)

Beispiele:

$$1,05 \cdot 0,2 = 0,210 = 0,21$$

Rechne zunächst $105 \cdot 2 = 210$. Der erste Faktor hat 2 Nachkommastellen, der zweite hat 1, also muss der Wert des Produkts 3 Nachkommastellen erhalten!

$$0,128 : 0,04 = 12,8 : 4 = 3,2$$

Das Komma wird hier jeweils um 2 Stellen nach links verschoben!

Beispiele:

$$-\frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3} \quad \text{aber} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$0,5^{-2} = \frac{1}{0,5^2} = \frac{1}{0,25} = \frac{100}{25} = 4$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

5. Flächeninhalte

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms

wird berechnet durch das Produkt aus **Grundlinie g** mal **zugehöriger Höhe h** . Jede Seite des Parallelogramms kann als Grundlinie gewählt werden!

$$A_P = g_1 \cdot h_1 = g_2 \cdot h_2$$

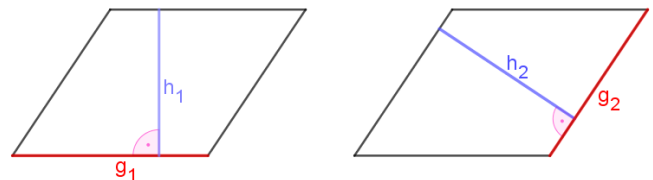
Der Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

(Drei Möglichkeiten, da es drei Dreiecksseiten gibt)

Der Flächeninhalt eines Trapezes:

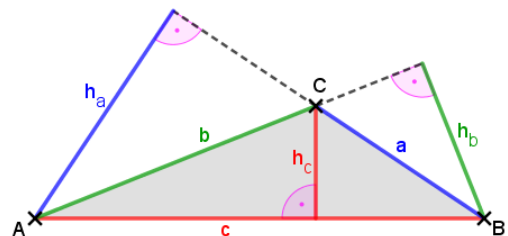
$$A_T = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$



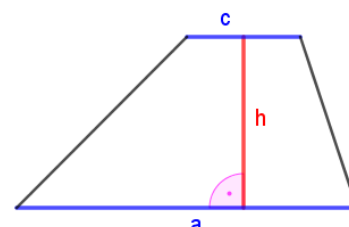
Beispiel: $g_1 = 0,5 \text{ dm}, h_1 = 4 \text{ cm}$

$$A_P = g_1 \cdot h_1 = 5 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 20 \text{ cm}^2$$

Hinweis: Vorher unbedingt in eine gemeinsame Einheit umwandeln!



Hinweis: In einem stumpfwinkligen Dreieck liegen zwei Höhen außerhalb des Dreiecks!



Den Flächeninhalt komplexerer Vielecke kann man bestimmen, indem man sie in die bereits genannten Flächen zerlegt.

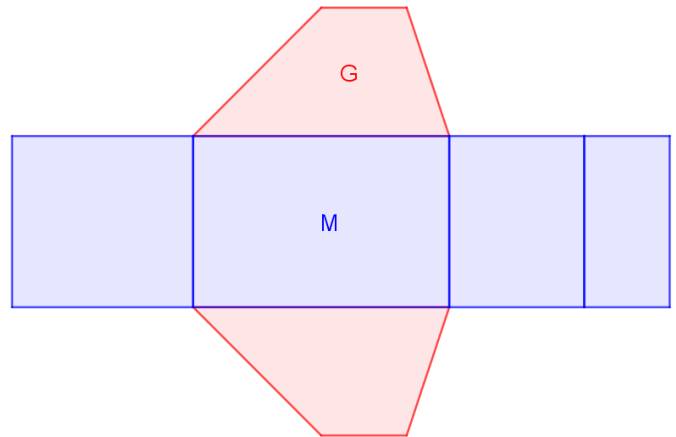
Das Prisma und sein Oberflächeninhalt:

Bei einem **geraden** Prisma bestehen **Grundfläche G** und Deckfläche aus deckungsgleichen Vielecken. Die Seitenkanten sind parallel, gleich lang und stehen senkrecht auf der Grundfläche. Die rechteckigen Seitenflächen bilden zusammen die sog. **Mantelfläche M**.

Oberflächeninhalt:

$$O_{Prisma} = 2 \cdot G + M$$

Beispiel eines Prismennetzes:



6. Verbindung der Grundrechenarten

Vorfahrtsregeln:

- Klammern werden zuerst berechnet (bei mehreren von innen nach außen).
- Potenzen vor Punktrechnungen vor Strichrechnungen
- Von links nach rechts rechnen

Rechengesetze und Rechenvorteile:

Manchmal kannst du dir das Rechnen erleichtern, indem du geschickt das **Kommutativ-**, das **Assoziativ-** oder das **Distributivgesetz** anwendest.

Merkspruch:

„KlaPoPuStri“

Beispiele:

$$8 \cdot \frac{3}{7} \cdot 0,25 = 8 \cdot 0,25 \cdot \frac{3}{7} = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7} \text{ (K-Gesetz)}$$

$$0,35 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{27}{5} = 0,35 \cdot \left(\frac{5}{9} \cdot \frac{27}{5}\right) = 0,35 \cdot 3 = 1,05 \text{ (A-Gesetz)}$$

$$0,57 \cdot \frac{3}{7} + 0,57 \cdot \frac{4}{7} = 0,57 \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right) = 0,57 \cdot 1 \text{ (D-Gesetz)}$$

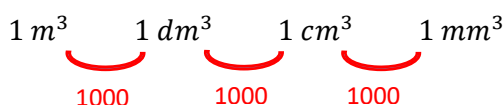
7. Rauminhalte

Volumeneinheiten:

Um Volumen von Körpern zu messen, kann man Einheitswürfel verwenden, z.B. hat ein Würfel mit der Kantenlänge 1 cm ein Volumen von 1 cm³.

In einen Würfel mit der Kantenlänge 1 dm passen 10 · 10 · 10 kleinerer Würfel mit der Kantenlänge 1 cm.

Die **Umrechnungszahl** für aufeinanderfolgende Volumeneinheiten ist daher **1000**.



Ein Volumen von 1 dm³ bezeichnet man als **1 Liter**.

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$$

Beispiele:

$$2,5 \text{ m}^3 = 2.500 \text{ dm}^3 = 2.500.000 \text{ cm}^3$$

$$15 \text{ cm}^3 = 0,015 \text{ dm}^3 = 0,000015 \text{ m}^3$$

Vorsicht: Da 1 km = 1000 m gilt:

$$1 \text{ km}^3 = (1000 \cdot 1000 \cdot 1000) \text{ m}^3 = 1.000.000.000 \text{ m}^3$$

Milliliter ml und Hektoliter hl:

$$1 \text{ ml} = 0,001 \text{ l}, \text{ daher ist } 1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$$

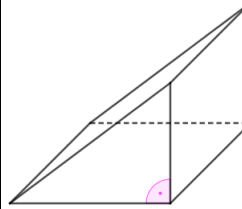
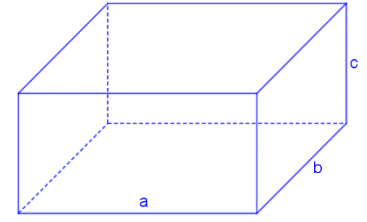
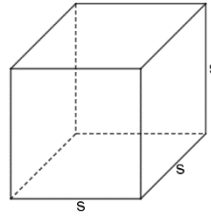
Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge s :

$$V_W = s \cdot s \cdot s = s^3$$

Volumen eines Quaders:

$$V_Q = a \cdot b \cdot c$$

Komplexere Körper lassen sich oft geschickt zu Quadern ergänzen oder in Quader zerlegen.



Dieses Prisma lässt sich durch „Verdoppeln“ zu einem Quader ergänzen.

8. Prozentrechnung, Daten und Diagramme

Grundgleichung der Prozentrechnung

$$\text{Prozentsatz} \cdot \text{Grundwert} = \text{Prozentwert}$$

$$PS \cdot GW = PW$$

Zum Lösen der Aufgaben kannst du auf bekannte Strategien zurückgreifen, wie z.B. **Umkehraufgaben**, **Dreisatz** oder **Bestimmung des Anteils** (vgl. 1. oben)

Diagramme:

Typen: Säulen-, Balken-, Streifen-, Linien-, Kreisdiagramme, Bilddiagramme

Diagramme können einen **falschen Eindruck** vermitteln, wenn z.B. die **Achsen nicht bei 0 beginnen** oder die **Einteilung der Achsen nicht gleichmäßig** ist. Bei Bilddiagrammen ergibt sich ein falscher Eindruck, wenn nicht der Flächeninhalt vervielfacht wird, sondern sowohl Höhe als auch Breite.

Das Arithmetische Mittel \bar{m}

gibt den Durchschnittswert aller Werte an.

$$\bar{m} = \frac{\text{Summe aller Werte}}{\text{Gesamtanzahl}}$$

Beispiele:

PW gesucht: 15 % von 200 € = $0,15 \cdot 200 \text{ €} = 30 \text{ €}$

GW gesucht: 25 % von $x = 30 \text{ kg}$

Umkehraufgabe: $x = 30 \text{ kg} : 25 \% = 30 \text{ kg} : 0,25 = 120 \text{ kg}$

PS gesucht: x von 15 m = 12 m

$$x = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 80 \%$$

Beispiel für einen Dreisatz (Wiederholung):

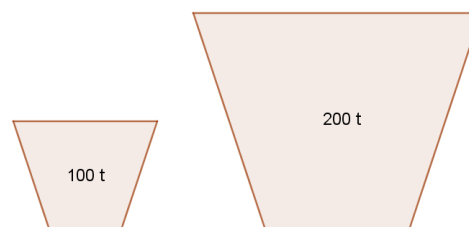
150 g Gummibärchen kosten 2,25 €. Berechne den Preis für 100 g Gummibärchen.

$$\begin{array}{l} 150 \text{ g} \cong 2,25 \text{ €} \\ \cdot 15 \quad \cdot 15 \\ \hline 10 \text{ g} \cong 0,15 \text{ €} \\ \cdot 10 \quad \cdot 10 \\ \hline 100 \text{ g} \cong 1,50 \text{ €} \end{array}$$

Wichtige Grundfertigkeit:

Erstellen eines Kreisdiagramms!

Beispiel für ein irreführendes Bilddiagramm



Entwicklung des Müllaufkommens

Beispiel: Schulaufgabenschnitt

Einzelnoten: 2, 4, 2, 2

$$\bar{m} = \frac{2 + 4 + 2 + 2}{4} = \frac{3 \cdot 2 + 4}{4} = 2,5$$