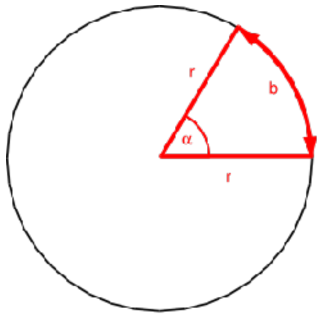
Grundwissen 10. Jahrgangsstufe – Mathematik

Wissen / Können | **Beispiele**

1. Kreiszahl π, Bogenmaß, Kreisteile, Kugel

Die **Zahl** π ist als irrationale Zahl nicht als Bruch darstellbar. Näherungswerte für können z.B. Annäherungen an den Umfang $U = 2r\pi$ oder den Flächeninhalt $A = r^2\pi$ eines Kreises durch Vielecke gewonnen werden.

Die ersten 30 Dezimalen von π:
$\pi = 3{,}141592653589793238462643383279...$
$\pi \approx 3{,}1416$



Bogenmaß:
Winkel können im Gradmaß (Vollwinkel 360°) oder im Bogenmaß (Vollwinkel 2π) gemessen werden.
Das Bogenmaß x gibt das zum Winkel α gehörende Verhältnis von Bogenlänge b und Radius r an: $x = \frac{b}{r}$
Der Taschenrechner ist bei Verwendung der trigonometrischen Funktionen auf das entsprechende Maß einzustellen!

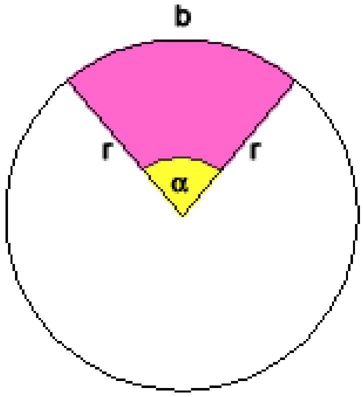
Umrechnungen der Maße ineinander:
20° sind $\frac{20}{360}$ des Vollwinkels $\Rightarrow$
$20° = \frac{20}{360} \cdot 2\pi \Rightarrow 20° = \frac{1}{9}\pi$

$\frac{\pi}{4}$ ist $\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{1}{8}$ des Vollwinkels $\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 45°$

Kreissektor mit Mittelpunktswinkel α:
Die Fläche A des Kreissektors und die Bogenlänge b sind jeweils der Bruchteil $\frac{\alpha}{360°}$ von der Kreisfläche bzw. des Kreisumfangs:

$$A = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \pi$$

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2r\pi$$



Kugel:
Für das Volumen V und die Oberfläche O einer Kugel mit Radius r gilt:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi$$

$$O = 4r^2 \pi$$

Welchen Radius hat eine Kugel mit Volumen $V=1m^3$?

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi$$

$$1m^3 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi$$

$$\frac{3\pi}{4} m^3 = r^3 \Rightarrow r \approx 0{,}62m$$

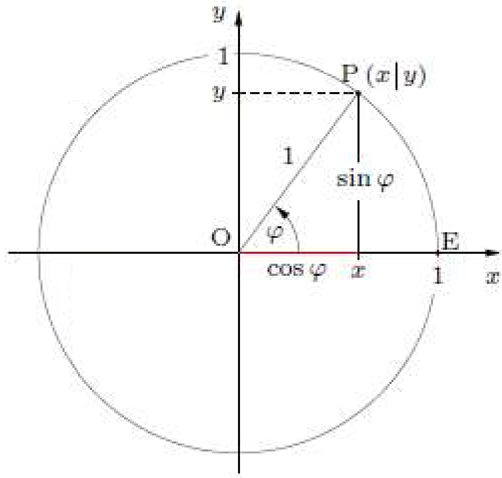
2. Geometrische und funktionale Aspekte der Trigonometrie

Ist P(x|y) ein beliebiger Punkt auf dem Einheitskreis und der Winkel α mit der Halbgeraden [OE als 1. und der Halbgeraden [OP als 2. Schenkel, dann gilt:

$$\sin\alpha = y; \;\; \cos\alpha = x$$

Für $0° \le \alpha \le 90°$ gilt:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha; \quad \sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha; \quad \cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$$



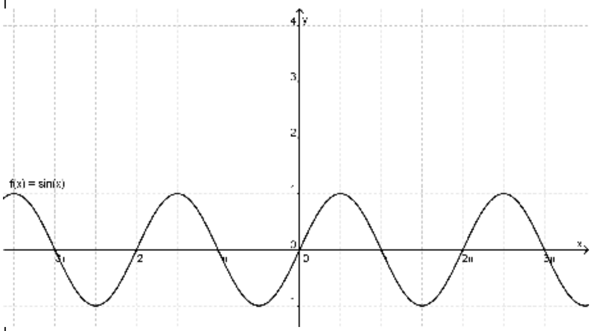
Welche Koordinaten hat ein Punkt P des Einheitskreises, wenn der Kreisbogen zwischen ihm und E die Länge 2 hat?

Für b=4 ergibt sich
$\varphi \approx 229° \Rightarrow P(-0{,}65 \,|\, -0{,}75)$

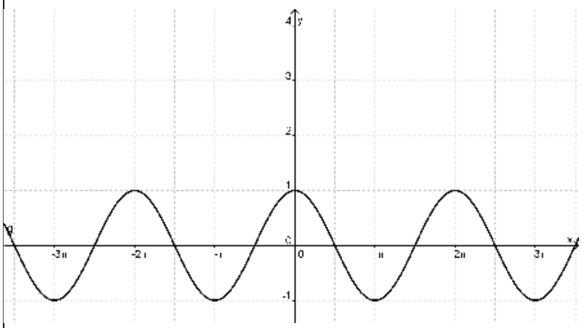
Die Funktion $x \to \sin x$; $x \in \mathsf{R}$ (Winkel im Bogenmaß) heißt **Sinusfunktion** und ihr Graph **Sinuskurve**.

Die Funktion $x \to \cos x$; $x \in \mathsf{R}$ (Winkel im Bogenmaß) heißt **Kosinusfunktion** und ihr Graph **Kosinuskurve**.

Beide Funktionen sind **periodisch** mit der Periode 2π , d.h. auch nach einer Verschiebung der Kurven um ein ganzzahliges



Vielfaches von 2π erhält man wieder die Ausgangskurve.
Die **Wertemenge** ist in beiden Fällen [-1;1].
Die Sinuskurve in **punktsymmetrisch** zum Ursprung, die Kosinuskurve ist **achsen-symmetrisch** zur y-Achse.
Die Sinuskurve und die Kosinuskurve lassen sich jeweils durch Verschiebung in x-Richtung um $\frac{\pi}{2}$ bzw. $-\frac{\pi}{2}$ ineinander überführen.



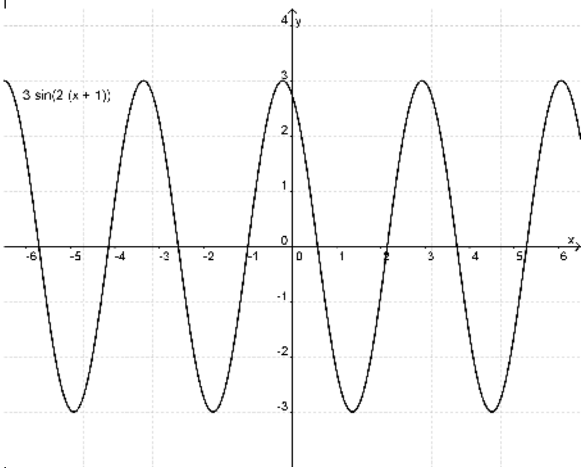
Durch die **allgemeine Sinusfunktion**

$$x \to a \cdot \sin(bx + c) = a \cdot \sin\left(b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right)$$

mit $x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $b > 0$, lassen sich bei geeigneter Wahl von a, b, c beliebige sinusförmige Graphen beschreiben.

Einfluss der Parameter a, b und c:

- **a** streckt bzw. staucht die Sinuskurve in y-Richtung mit dem Faktor |a|.
  |a| heißt Amplitude.
- **b** streckt bzw. staucht die Sinuskurve in x-Richtung mit dem Faktor b. Die Periode der Kurve neuen Kurve ist dann $\frac{2\pi}{b}$.
- **c** verschiebt die Sinuskurve für c>0 nach rechts und für c<0 nach links jeweils um $\frac{c}{b}$.



Das Bild zeigt eine um den Faktor **3** in y-Richtung gestreckte, um den Faktor **2** in x-Richtung gestauchte und um **1** nach links verschobene Sinuskurve.

3. Exponentielles Wachstum und Logarithmen

Lineares Wachstum

$$f(x) = \underset{\text{Anfangswert}}{t} + \underset{\text{Anzahl Zeiteinheiten}}{x} \cdot \underset{\text{Zuwachs pro Zeiteinheit}}{m}$$

- è Konstanter Zuwachs pro Zeiteinheit, ID=IR
- è $f(x+1) - f(x) =$ KONSTANT (= m)
- è Darstellung als lineare Funktion

Exponentielles Wachstum

$$f(x) = \underset{\text{Anfangswert}}{b} \cdot (\underset{\text{Zuwachs faktor pro Zeiteinheit}}{a})^{x} \quad \text{<−−Anzahl Zeiteinheiten}$$

$(b \neq 0, a > 0)$

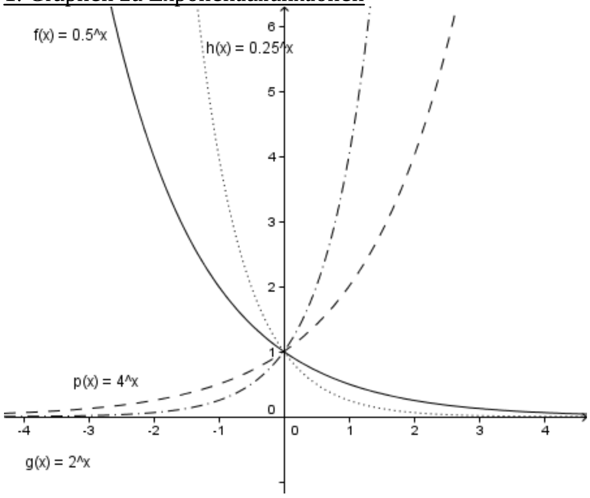
- è Konstanter Zuwachsfaktor (a) pro Zeiteinheit (a=1 trivial, drum ausgeschlossen) ID=IR
- è $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} =$ KONSTANT (=a)

Eine Funktion, die exponentielles Wachstum oder exponentiellen Zerfall beschreibt, heißt EXPONENTIALFUNKTION.
Echtes Wachstum à a > 1 à Graph steigt in ganz IR,
Zerfall à 0 < a < 1 à Graph fällt in ganz IR.
Der Graph schneidet die y-Achse in der Höhe des Anfangswertes b, da $f(0) = b \cdot a^0 = b$

Spiegelt man den Graphen zu $f(x) = b \cdot a^x$ an der y-Achse, so erhält man den Graphen zu

$g(x) = b \cdot a^{-x} = b \cdot \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ und umgekehrt.

1. Graphen zu Exponentialfunktionen



2. Bestimmung eines Anfangswertes
Eine Bakterienkultur verdoppelt ihre Anzahl innerhalb eines Tages. Nach 3 Tagen sind es 1000000 Bakterien. Wie groß war die Bakterienkultur zum Zeitpunkt des Beobachtungsbeginns?

$$g(x) = b \cdot 2^x$$

$$g(3) = b \cdot 2^3 = 1000000$$

$$b = \frac{1000000}{2^3} \approx \ldots$$

3. Bestimmung des Wachstumsfaktors a
3.1 Ein Kürbis verdoppelt innerhalb von 5 Tagen sein Gewicht. Bestimme den Wachstumsfaktor pro Tag.

$$g(x) = b \cdot a^x$$

$$b \cdot a^5 = 2b \Rightarrow a = \sqrt[5]{2}$$

3.2 Eine alkoholfreie Biersorte besitzt im Glas nach ungeschicktem Einschenken eine Schaumhaube von 7 cm Dicke. Nach 4 Minuten ist die Schaumhaube genau noch 3,4 cm dick. Bestimme den Bierschaumzerfallsfaktor pro Minute für diese Sorte.

$$g(x) = b \cdot a^x$$

$$7cm \cdot a^4 = 3{,}4cm \Rightarrow a = \sqrt[4]{\frac{3{,}4}{7}} \approx \ldots$$

Logarithmen
Der *Logarithmus von b zur Basis a* ist die Lösung der Exponentialgleichung $a^x = b$,
man schreibt $x = \log_a b$, d.h. $a^{\log_a b} = b$.
Rechenregeln: (Wichtig: jeweils gleiche Basis!!!)

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a(u : v) = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a u^z = z \cdot \log_a u$$

1.

$$2\log_a x + \log_a y - 3\log_a z = \log_a \frac{x^2 \cdot y}{z^3}$$

2. $\log_2(3x) + 1 = \log_2 4$

$\log_a u = \frac{\log u}{\log a}$ (Der Taschenrechner kennt die Werte des 10er-Logarithmus $\boxed{\log}$ und die des natürlichen Logarithmus $\boxed{\ln}$) $\log_a(u \pm v) =$ M M M, deshalb beim Gleichungen lösen darauf achten, dass man erst logarithmiert, wenn auf keiner der Seiten mehr eine Summe/ Differenz steht! IMMER: $\log_a 1 = 0$, da nur $a^0 = 1$ für $a \neq 1$	$\log_2 3 + \log_2 x + \log_2 2 = \log_2 4$ $\log_2 x = \log_2 \frac{4}{2 \cdot 3}$ $x = \frac{2}{3}$
<u>Exponentialgleichungen</u> Lösungsstrategien: 1. Die Gleichung auf die Form $a^x = b$ bringen à $x = \log_a b$ 2. Alle Potenzen auf eine Basis bringen, zusammenfassen und Exponenten „vergleichen“ 3. Gleichung so umformen, dass auf beiden Seiten Produkte stehen und LOGARITHMIEREN (es kann NICHT logarithmiert werden, wenn auf einer der Seiten der Gleichung noch eine Summe oder Differenz zu finden ist, da $\log_a(u \pm v) =$ M M M, s. oben)	Zu 1. $3^{2x} = 2^x \cdot 5$ $\frac{3^{2x}}{2^x} = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{3^2}{2}\right)^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_{4,5} 5$ Zu 2. $9^x = 3^4 \cdot 27^{-2x}$ $(3^2)^x = 3^4 \cdot (3^3)^{-2x}$ $3^{2x} = 3^{(4+(-6x))}$ $2x = 4 - 6x \Rightarrow x = \ldots$ Zu 3. $3^{2x} = 2^x \cdot 5$ $\log 3^{2x} = \log(2^x \cdot 5)$ $2x \log 3 = x \log 2 + \log 5$ $x(2\log 3 - \log 2) = \log 5$ $x = \frac{\log 5}{2\log 3 - \log 2} = \frac{\log 5}{\log 4{,}5} (s. zu 1.)$

4. Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente

<u>Vierfeldertafel</u>

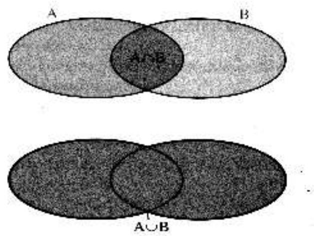
Betrachtet werden zwei Ereignisse A und B.

$\overline{A}$ bzw. $\overline{B}$ bedeutet, dass das jeweilige Ereignis NICHT eintritt.

Mögliche Verknüpfungen: beide treten ein ($A \cap B$)
NUR A tritt ein ($A \cap \overline{B}$)
NUR B tritt ein ($\overline{A} \cap B$)
keines tritt ein ($\overline{A} \cap \overline{B}$)

Die Verknüpfungen der beiden Ereignisse lassen sich in einem Venn-Diagramm oder einer Vierfeldertafel darstellen.

<u>Venn-Diagramm:</u>



<u>Vierfeldertafel</u> der <u>relativen</u> Häufigkeiten:

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	$P(\Omega) = 1$

Eine <u>Vierfeldertafel</u> der <u>absoluten</u> Häufigkeiten enthält jeweils die MÄCHTIGKEIT (Anzahl der Elemente) der jeweiligen Schnittmenge.

Es gilt: $P(A \cap B) = \dfrac{|A \cap B|}{|\Omega|}$ (übrige Wahrscheinlichkeiten entsprechend!)

In einer Umfrage soll das Auftreten von Rückenschmerzen (R) und exzessives Public-Viewing (P) zu WM-Zeiten überprüft werden.
Von 300 Befragten geben 210 an, zu WM-Zeiten intensiv dem Public-Viewing gefrönt zu haben, 160 geben an, oft beim Public-Viewing gewesen zu sein UND an Rückenschmerzen gelitten zu haben, 21 geben an, dass sie weder beim Public-Viewing gewesen zu sein noch an Rückenschmerzen gelitten zu haben.

Vierfeldertafel der absoluten Häufigkeiten:

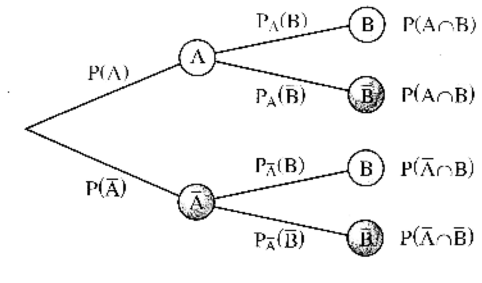
	P	$\overline{P}$	
R	160	69	229
$\overline{R}$	50	21	71
	210	90	300

Vierfelder der relativen Häufigkeiten:

	P	$\overline{P}$	
R	53,33%	23,00%	76,33%
$\overline{R}$	16,67%	7,00%	23,67%
	70,00%	30,00%	100%=1

<u>Bedingte Wahrscheinlichkeit</u>

Die Verknüpfung zweier Ereignisse A und B lässt sich auch mit Hilfe eines Baumdiagramms darstellen:



Umfrage wie oben!

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Public-Viewer, an Rückenschmerzen zu leiden?

$$P_P(R) = \frac{P(P \cap R)}{P(R)} = \frac{53{,}33\%}{70{,}00\%} = 76{,}19\%$$

(Public-Viewing wirkt sich also anscheinend eher ungünstig aus....)

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Mensch, der Rückenschmerzen hat kein Public-Viewer?

$$P_R(\overline{P}) = \frac{P(\overline{P} \cap R)}{P(R)} = \frac{23{,}00\%}{76{,}33\%} = 30{,}13\%$$

Die Wahrscheinlichkeiten auf der zweiten Stufe des Baumdiagramms entsprechen dabei den so genannten <u>BEDINGTEN WAHRSCHEINLICHKEITEN</u>. $P_A(B) :=$ „Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B, <u>unter der Bedingung, dass</u> A bereits eingetreten ist“ Das heißt von der Gesamtmenge Ω wird nur die Teilmenge A als neue Gesamtheit betrachtet und bestimmt, welcher Prozentsatz dieser Menge ZUSÄTZLICH in der Menge B liegt. è $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$	

5. Funktionenlehre: Ganzrationale Funktionen

<u>Ganzrationale Funktionen</u>

Eine Funktion der Form

$f(x) = a \cdot x^n$ heißt Potenzfunktion vom Grad n.

Eine Funktion der Form

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 \underbrace{x^1}_{=x} + a_0 \underbrace{x^0}_{=1}$ heißt

<u>ganzrationale Funktion vom Grad n.</u>

Die höchste Vorkommende Potenz von x ist der Grad der Funktion.

Der Funktionsterm heißt <u>Polynom.</u>

Die Faktoren $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heißen <u>Koeffizienten</u> und sind reelle Zahlen.

Der Faktor a_n vor der höchsten Potenz heißt <u>Leitkoeffizient.</u>

$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5$, Grad 3, Leitkoeffizient 4

$g(x) = -2x^6 - x^4 + 5x^3$, Grad 6, Leitkoeffizient -2

$h(x) = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{2}{3}x$, Grad 2, Leitkoeffizient $-\frac{1}{7}$

<u>Bemerkung:</u>

Ganzrationale Funktionen vom Grad 1 sind längst bekannt unter dem Pseudonym LINEARE FUNKTIONEN. Ganzrationale Funktionen vom Grad 2 sind fast so lang bekannt unter dem Pseudonym QUADRATISCHE FUNKTIONEN.

<u>Charakteristischer Graphenverlauf:</u>

Ganzrationale Funktionen mit geradem Grad zeigen das selbe Verhalten im Positiv-Unendlichen und im Negativ-Unendlichen („von links oben nach rechts oben“ oder „von links unten nach rechts unten“). Ob der Graph „von links unten“ oder „von links oben“ kommt, entscheidet ALLEIN das Vorzeichen des Leitkoeffizienten.

$a_n > 0$ à „von links oben nach rechts oben“

$a_n < 0$ à „von links unten nach rechts unten“

Ganzrationale Funktionen mit ungeradem Grad zeigen unterschiedliches Verhalten im Positiv-Unendlichen und Negativ-Unendlichen.

$a_n > 0$ à „von links unten nach rechts oben“

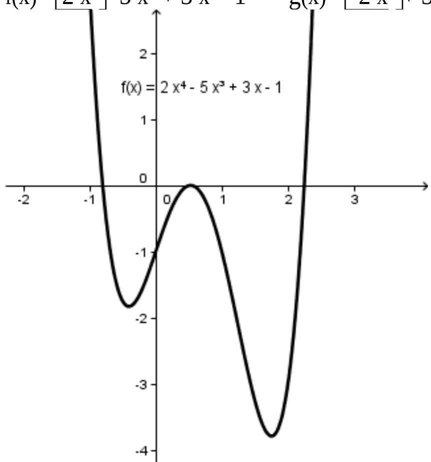
$a_n < 0$ à „von links oben nach rechts unten“

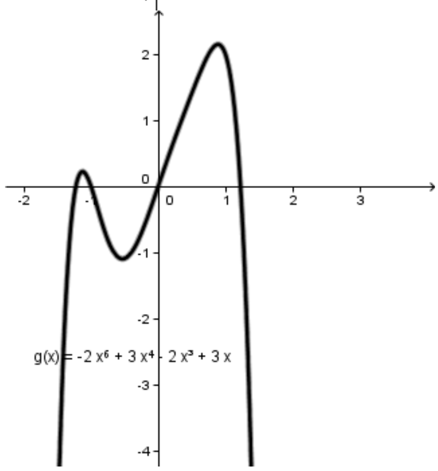
„Von links unten nach rechts oben“ „von links oben nach rechts unten

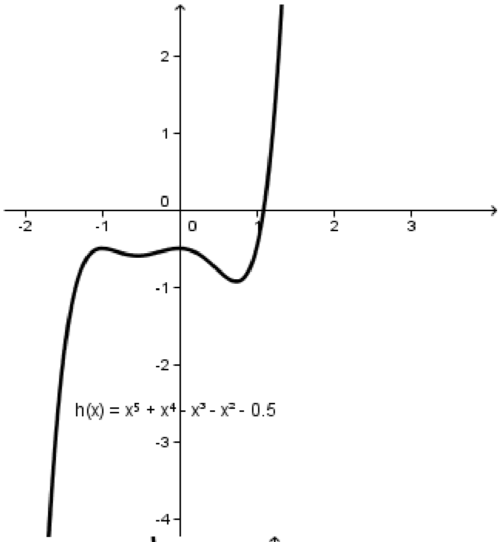
h(x) = $\boxed{x^5}$ + x^4 - x^3 - x^2 - 0.5 k(x) = $\boxed{-2x^3}$ - x^2 + x - 1

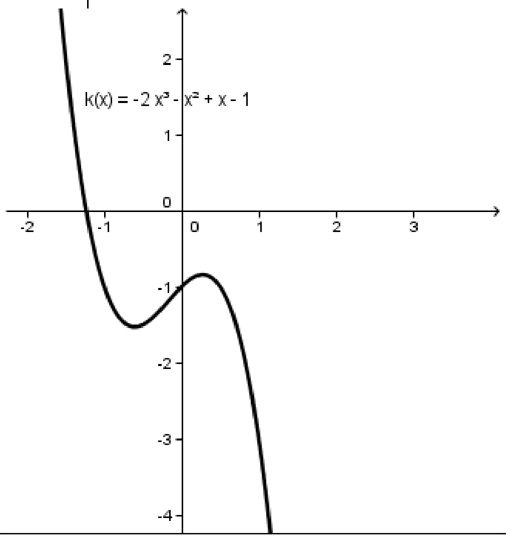
„Von links oben nach rechts oben“ „von links unten nach rechts unten“

f(x) = $\boxed{2x^4}$ - 5 x^3 + 3 x – 1 g(x) = $\boxed{-2x^6}$ + 3 x^4 - 2 x^3 + 3 x









Nullstellen und Faktorisierung:

Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen, wobei jede Nullstelle mit ihrer Vielfachheit in die Bilanz der Nullstellenzahl eingeht.

Aus dem faktorisierten Funktionsterm lassen sich die NULLSTELLEN mit ihrer VIELFACHHEIT ablesen. Der zu einer Nullstelle gehörende Faktor im Funktionsterm heißt Linearfaktor. Der Exponent des jeweiligen Linearfaktors bezeichnet man als die Vielfachheit der Nullstelle.

Der Graphenverlauf in der Nähe einer Nullstelle hängt ab von deren Vielfachheit:

1-fache Nullstelle à „glatt durch“ ohne tangentiale Annäherung

Gerad-fache Nullstelle à Berührung der x-Achse ohne Durchstoß

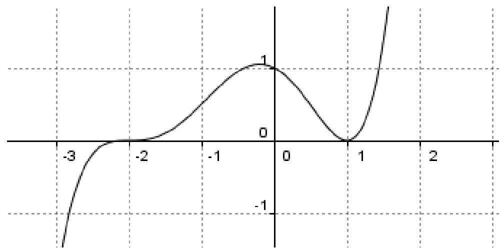
Ungerad-fache Nullstelle mit Vielfachheit >3 à Durchstoß mit tangentialer Annäherung

Die Faktorisierung erfolgt über

- Ausklammern (bekannt!)
- Erkennen von Binomischen Formeln (bekannt ☺!!)
- Mitternachtsformel (sehr bekannt ☺!!!)
- Satz von Vieta (geschickter Blick!)

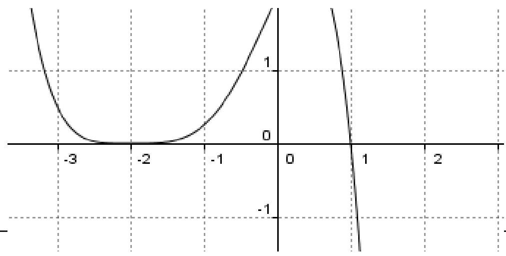
$f(x)=\frac{1}{8}(x+2)^3\cdot(x-1)^2$, Grad 5

Nullstellen: $x_1=-2$, 3-fach; $x_2=1$, 2-fach



$g(x)=-\frac{1}{8}(x+2)^4\cdot(x-1)$, Grad 5

Nullstellen: $x_1=-2$, 4-fach; $x_2=1$, 1-fach



Polynomdivision bei Termen vom Grad > 3 (falls nicht ausgeklammert werden kann, um einen niedrigeren Grad zu erzielen)	
Verschieben von Funktionsgraphen: Verschiebung von f(x) in x-Richtung um a: $f(x-a)$ Verschiebung von f(x) in y-Richtung um b: $f(x)+b$	Bereits bekannt von den quadratischen Funktionen. (Parabeln)
Strecken und Spiegeln von Funktionsgraphen: - Streckung von f(x) in y-Richtung: $c \cdot f(x)$ $\|c\| > 1$ bewirkt echte Streckung, $\|c\| < 1$ bewirkt Stauchung $c < 0$ bewirkt zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse - Streckung von f(x) in x-Richtung: $f(d \cdot x)$ $\|d\| > 1$ bewirkt Stauchung, $\|d\| < 1$ bewirkt echte Streckung $d < 0$ bewirkt zusätzlich eine Spiegelung an der y-Achse	Bereits bekannt von den quadratischen Funktionen. (Parabeln)
Symmetrie von Funktionsgraphen: Mögliche Symmetrien zum Koordinatensystem sind die § Punktsymmetrie zum Ursprung $\Leftrightarrow \quad f(-x) = -f(x)$ § Achsensymmetrie zur y-Achse $\Leftrightarrow \quad f(-x) = f(x)$ Bei Ganzrationalen Funktionen liegt Punktsymmetrie (Achsensymmetrie) genau dann vor, wenn alle vorkommenden Exponenten von x ungerade (gerade) sind.	
Grenzwerte im Unendlichen: Eine Funktion besitzt im Unendlichen den Grenzwert a, wenn sich die Funktionswerte für beliebig riesige x-Werte einem bestimmten Wert a annähern. Man nennt die Funktion dann konvergent. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$. Entsprechend für $x \to -\infty$. Ganzrationale Funktionen besitzen KEINEN Grenzwert im Unendlichen, da die Funktionswerte jeweils gegen Positiv/Negativ-Unendlich streben. Besitzt eine Funktion keinen Grenzwert im Unendlichen, so nennt man sie divergent.	Bei gebrochen-rationalen Funktionen gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$, falls z > n („divergent"!) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, falls z < n $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a}{b}$, falls z = n und a bzw. b die Koeffizienten vor der höchsten Potenz des Zählers bzw. Nenners. z bzw. n = Grad des Zähler- bzw. Nennerpolynoms Andere Beispiele: $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^x = +\infty$ (kein Grenzwert, die Funktionswerte werden beliebig groß!!) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x = 0^+$ (Die Funktionswerte streben von oben her gegen Null!) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(x) =$ M (die Werte schwanken zwischen -1 und 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot \cos(x)) =$ M (die Werte werden vom Betrag her riesig (wegen Faktor x, der Graph schwingt aber zwischen +∞ und -∞, wegen Faktor cos(x)) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x} \cdot \cos(x)) = 0$ (Die Werte schwingen zwar, werden durch Faktor $\frac{1}{x}$ aber immer kleiner à gegen die x-Achse gepresst)